

Opción A

1A.- Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

a. Calcule el valor de la integral: $\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos(x) dx$. 1'25 pts

b. Halle las asíntotas de la función: $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1}$ 1'25 pts

Solución

(a)

Calcule el valor de la integral: $\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos(x) dx$.

Calculamos primero la integral indefinida:

$$F(x) = \int x \cdot \cos(x) dx = \left. \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos(x) dx \Rightarrow v = \int \cos(x) dx = \sin(x) \end{array} \right\} = x \cdot \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \cdot \sin(x) - (-\cos(x)) + K =$$
$$= x \cdot \sin(x) + \cos(x) + K.$$

Luego $\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos(x) dx = [x \cdot \sin(x) + \cos(x)]_0^{\pi/2} = ((\pi/2) \cdot \sin(\pi/2) + \cos(\pi/2)) - ((0) \cdot \sin(0) + \cos(0)) =$
 $= \pi/2 - 1$.

(b)

Halle las asíntotas de la función: $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1}$.

Sabemos que el dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{\text{soluciones de } x^2 - 1 = 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, la recta $x = a$ es una asíntota vertical de $f(x)$.

Como $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} \right) = \frac{4}{0^+} = +\infty$, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical de la gráfica de f .

Posición relativa $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} \right) = \frac{4}{0^-} = -\infty$.

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} \right) = \frac{6}{0^-} = -\infty$, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la gráfica de f .

Posición relativa $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} \right) = \frac{6}{0^+} = +\infty$.

La recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua (A.O.) de la función $f(x)$ sii $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx+n)) = 0$.

En la práctica $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$.

Las A.O. se pueden presentar en cocientes de polinomios con el numerador un grado más que el denominador, y es la misma en $+\infty$ y en $-\infty$.

En cociente de polinomios rápidamente la A.O. se obtiene dividiendo numerador entre el denominador y la asíntota es el cociente.

Rápidamente

$$\begin{array}{r} x^3 + 5x^2 \quad | \quad x^2 - 1 \\ \hline -x^3 + x \quad \quad \quad | \quad x + 5 \quad \text{A.O.} \\ \hline 5x^2 + x \\ 5x^2 + 5 \\ \hline x + 5 \end{array}$$

Vamos a comprobar que la A.O es $y = mx + n = x + 5$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 5x^2}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^3} \right) = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx+n)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 5x^2 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + x}{x^2 - 1} = 5$$

Luego la A.O es $y = x + 5$

Como es un cociente de polinomios es la misma en $+\infty$ y en $-\infty$, y no tiene asíntotas horizontales en $\pm\infty$.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} - 1 \cdot x \right) = 0^+$, la gráfica de $f(x)$ está por encima de la A.O. en $+\infty$.

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} - 1 \cdot x \right) = 0^+$, la gráfica de $f(x)$ está por encima de la A.O. en $-\infty$.

2A.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 10 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Se plantea la siguiente ecuación matricial: $X \cdot A - C^t = X \cdot B$.

- Justifique razonadamente cuál es la dimensión de la matriz X . 0'5 pts
- Halle la matriz X que cumple la ecuación. 2 pts

Solución

(a)

Justifique razonadamente cuál es la dimensión de la matriz X .

Tenemos $X \cdot A_{3 \times 3} - C^t_{2 \times 3} = X \cdot B_{3 \times 3}$, luego X tiene de orden 2×3 , pues para sumar matrices tienen que tener el mismo orden (C^t tiene 2×3) y para multiplicar matrices las columnas de la 1^a tienen que coincidir con las filas de la 2^a , y el resultado del producto es filas de la 1^a y columnas de la 2^a .

(b)

Halle la matriz X que cumple la ecuación.

$$\text{De } X \cdot A - C^t = X \cdot B \rightarrow X \cdot A - X \cdot B = C^t \rightarrow X \cdot (A - B) = C^t.$$

$$\text{Sea } D = A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 10 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Como } \det(D) = |D| = |A - B| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ (producto de los elementos de la diagonal principal por ser una}$$

matriz triangular), existe la matriz inversa $D^{-1} = (A - B)^{-1} = D^{-1} = \frac{1}{|D|} \cdot \text{Adj}(D)^t$.

$$\text{De } X \cdot (A - B) = C^t = X \cdot D = C^t, \text{ multiplicando por la derecha por } D^{-1} \text{ tenemos } X \cdot D \cdot D^{-1} = C^t \cdot D^{-1} \rightarrow X \cdot I = C^t \cdot D^{-1} \rightarrow X = C^t \cdot D^{-1}.$$

$$\text{Tenemos } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; |D| = 1, D^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{Adj}(D^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = D^{-1} = \frac{1}{|D|} \cdot \text{Adj}(D)^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Luego } X = C^t \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3A.- Dada la recta $r: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$, y dado el plano $\pi \equiv x - 3y + 5z = 2$.

- ¿Cuál es la posición relativa de la recta r y el plano π ? 1'25 pts
- Calcular el plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π . 1'25 pts

Solución

(a)

¿Cuál es la posición relativa de la recta r y el plano π ?

Un punto de la recta r es $A(0, 2, 2)$ y un vector director el $\mathbf{u} = (-2, 1, 1)$.

Un vector normal del plano π es $\mathbf{n} = (1, -3, 5)$.

Como el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = (-2, 1, 1) \cdot (1, -3, 5) = -2 - 3 + 5 = 0$, la recta r y el plano π son paralelos.

Como $(0) - 3(2) + 5(2) = 2$ es falso $A \notin \pi$ y la recta r y el plano π son paralelos y la recta no está contenida en el plano.

(b)

Calcular el plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π .

Para un plano π' necesitamos un punto, es $A(0, 2, 2)$ (π' contiene a la recta r), y dos vectores independientes, el $\mathbf{u} = (-2, 1, 1)$ (π' contiene a la recta r), y el $\mathbf{n} = (1, -3, 5)$ (π' es perpendicular a π).

$$\text{El plano pedido es } \pi' \equiv \det(\mathbf{AX}, \mathbf{u}, \mathbf{n}) = \begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = x(5+3) - (y-2)(-10-1) + (z-2)(6-1) = \\ = 8x + 11y + 5z - 32 = 0.$$

4A.- Si una bombilla fluorescente presenta un 90% de posibilidades de tener una vida útil de al menos 800 horas, seleccionando 20 bombillas fluorescentes de este tipo, justificar si las siguientes afirmaciones son ciertas:

- Al seleccionar exactamente 18 bombillas fluorescentes, más del 30% tienen una vida útil de al menos 800 horas. 1 ptos
- La probabilidad de que dos bombillas fluorescentes o menos NO tengan una duración de al menos 800 horas es menor que 0'7. 1 ptos
- El valor esperado de bombillas con una vida útil de al menos 800 horas si se toma una muestra de 100 bombillas fluorescentes es igual a 10. 0'5 ptos

Solución

(a)

Al seleccionar exactamente 18 bombillas fluorescentes, más del 30% tienen una vida útil de al menos 800 horas.

Recordamos que si realizamos n veces (20) un experimento en el que podemos obtener éxito, F (tener vida útil de al menos 800 horas), con probabilidad \mathbf{p} ($p(F) = 90\% = 0'9$) y fracaso, F^c , con probabilidad \mathbf{q} ($q = 1 - p = 1 - 0'9 = 0'1$), diremos que estamos ante una distribución binomial de parámetros \mathbf{n} y \mathbf{p} , y lo representaremos por $\mathbf{B}(n; \mathbf{p})$.

Es decir nuestra variable \mathbf{X} sigue una binomial $\mathbf{B}(n; \mathbf{p}) = \mathbf{B}(20; 0'9)$.

En este caso la probabilidad de obtener \mathbf{k} éxitos, que es su función de probabilidad, viene dada por:

$$p(\mathbf{X} = \mathbf{k}) = \binom{20}{\mathbf{k}} \cdot 0'9^{\mathbf{k}} \cdot 0'1^{(20-\mathbf{k})} = \binom{20}{\mathbf{k}} \cdot 0'9^{\mathbf{k}} \cdot 0'1^{(20-\mathbf{k})}.$$

** $(n \text{ sobre } k) = \binom{n}{k} = (n!)/(k! \cdot (n - k)!)$ con $n!$ el factorial de "n". En la calculadora "n tecla nCr k"

En nuestro caso piden ver si $p(\mathbf{X} = 18) > 30\% = 0'3$.

Como $p(\mathbf{X} = 18) = \binom{20}{18} \cdot 0'9^{18} \cdot 0'1^{(2)} = 0'2851798 < 0'3$, es falso que $p(\mathbf{X} = 18) > 30\%$.

(b)

La probabilidad de que dos bombillas fluorescentes o menos NO tengan una duración de al menos 800 horas es menor que 0'7.

La probabilidad de que dos bombillas fluorescentes o menos NO tengan una duración de al menos 800 horas es menor que 0'7, es equivalente a que la probabilidad 18 bombillas o más, sea menor que 0'7.

En nuestro caso piden ver si $p(\mathbf{X} \geq 18) < 0'7$.

Como $p(\mathbf{X} \geq 18) = \binom{20}{18} \cdot 0'9^{18} \cdot 0'1^{(2)} + \binom{20}{19} \cdot 0'9^{19} \cdot 0'1^{(1)} + \binom{20}{20} \cdot 0'9^{20} \cdot 0'1^{(0)} = \\ = 0'2851798 + 0'2791703 + 0'1215766 = 0'6769267 < 0'7$, es cierto que $p(\mathbf{X} = 18) < 0'7$.

Tenemos $p(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0^2 \cdot 0^8 = (0^8)^5 = 0^32768$. $p(X = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0^2 \cdot 0^8 = (0^8)^5 = 0^32768$.

Luego es más probable que ninguno abandone los estudios.

(c)

El valor esperado de bombillas con una vida útil de al menos 800 horas si se toma una muestra de 100 bombillas fluorescentes es igual a 10.

Sabemos que la media de una variable X que sigue una binomial B(n, p) es n·p, en nuestro caso tenemos la binomial B(100, 0'9) y la media es 100·0'9 = 9 < 10, **luego es falso que el valor esperado de bombillas con una vida útil de al menos 800 horas si se toma una muestra de 100 bombillas fluorescentes es igual a 10.**

Opción B

1B.- Halle los valores de a y b para que la recta de ecuación $y=6x + a$ sea tangente a la curva $f(x) = \frac{bx-1}{bx+1}$

en el punto de abscisa $x = 0$

Escriba las funciones que se obtienen.

2'5 pts

Solución

La recta tangente a la gráfica de f(x) en $x = 0$ es: $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$

$$f(x) = \frac{bx-1}{bx+1}, f(0) = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

$$f'(x) = \frac{b \cdot (bx+1) - (bx-1) \cdot b}{(bx+1)^2}, f'(0) = \frac{b \cdot (0+1) - (0-1) \cdot b}{(0+1)^2} = 2b.$$

Luego la recta tangente en $x = 0$ es: $y + 1 = 2b \cdot x$, es decir $y = 2bx - 1$.

Igualando $6x + a = 2bx - 1$, tenemos $6 = 2b$, **b = 3** y **a = -1** y las funciones son: **$y=6x - 1$ y $f(x) = \frac{3x-1}{3x+1}$.**

2B.- Sea el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} kx + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ky + 4z = 2 \\ 2x + ky + 6z = k-2 \end{cases}$$

a. Discuta el sistema según los valores del parámetro k.

(1'75 pts)

b. Resuelva el sistema para $k = 0$.

(0'75 pts)

Solución

(a)

Discuta el sistema según los valores del parámetro k.

Sea $A = \begin{pmatrix} k & 2 & 6 \\ 2 & k & 4 \\ 2 & k & 6 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} k & 2 & 6 & 0 \\ 2 & k & 4 & 2 \\ 2 & k & 6 & k-2 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

Como $|A| = \begin{vmatrix} k & 2 & 6 \\ 2 & k & 4 \\ 2 & k & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 2 & 6 \\ 2 & k & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila = $(2)(k^2 - 4) = 2 \cdot (k - 2)(k + 2)$.

De $|A| = 0$, tenemos $2 \cdot (k - 2)(k + 2) = 0$, luego $k = -2$ y $k = 2$.

Si $k \neq -2$ y $k \neq 2$, $|A| \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$ = número de incógnitas, por el Teorema de Rouché, el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

Si $k = -2$, tenemos $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 12 = 20 \neq 0$, $\text{rango}(A) = 2$.

$$\text{En } A^* \text{ como } \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3+2F_2} \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -6 & 14 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{columna} \end{array} = -(2)(28 + 36) = 128 \neq 0, \text{ rango}(A^*) = 3$$

Si $k = -2$, tenemos $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, por el Teorema de Rouchè, el sistema es incompatible y no tiene solución.

$$\text{Si } k = 2, \text{ tenemos } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{En } A \text{ como } \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 24 = -16 \neq 0, \text{ rango}(A) = 2.$$

$$\text{En } A^* \text{ como } \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ por tener dos filas iguales, } \text{rango}(A^*) = 2.$$

Si $k = 2$, tenemos $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 <$ número de incógnitas, por el Teorema de Rouchè, el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones, (más de una).

(b)

Resuelva el sistema para $k = 0$.

Hemos visto en el apartado (a) que tiene solución única, lo resolveremos por las transformaciones elementales de Gauss.

$$\begin{cases} 2y + 6z = 0 \\ 2x + 4z = 2 \\ 2x + 6z = -2 \end{cases} \xrightarrow{(E_3 - E_2)} \begin{cases} 2y + 6z = 0 \\ 2x + 4z = 2 \\ 2z = -4 \end{cases}, \text{ de donde } z = -2, \text{ entrando en la } 2^{\text{a}} \rightarrow 2x - 8 = 2, \text{ luego } x = 5 \text{ y}$$

entrando en la $1^{\text{a}} \rightarrow 2y - 12 = 0$, luego $y = 6$.

La solución del sistema para $k = 0$ es: $(x, y, z) = (5, 6, -2)$.

3B.- Consideremos el punto $A(1, 2, 1)$, y la recta $r: \begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + z = 14 \end{cases}$.

a. Encuentre la ecuación del plano π que contiene al punto A y es perpendicular a la recta r. 1'5 ptos

b. Consideremos $P(1, 4, 2)$, un punto de la recta r. Y sea s la recta determinada por los puntos A y P.

Calcule el ángulo que forman las rectas r y s.

1'25 ptos

Solución

(a)

Encuentre la ecuación del plano π que contiene al punto A y es perpendicular a la recta r.

$$\text{De } r: \begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + z = 14 \end{cases}, \text{ tomamos } x = m \in \mathbb{R}, \text{ con lo cual } y = 5 - m, \text{ y } z = 14 - 3m, \text{ luego } r: \begin{cases} x = m \\ y = 5 - m \\ z = 14 - 3m \end{cases}.$$

Para el plano π necesitamos un punto, el A (uno de la recta) y un vector normal, el $\mathbf{n} = \mathbf{u} = (1, -1, 3)$ (el plano es perpendicular a la recta r).

El plano pedido es: $\pi \equiv \mathbf{AX} \bullet \mathbf{n} = 0 = (x - 1, y - 2, z - 1) \bullet (1, -1, 3) = x - y + 3z - 2 = 0$.

(b)

Consideremos $P(1, 4, 2)$, un punto de la recta r. Y sea s la recta determinada por los puntos A y P. Calcule el ángulo que forman las rectas r y s.

Sabemos que el ángulo que forman dos rectas es el menor de los ángulos que forman sus vectores de dirección con un origen común, es decir $\cos(\langle r, s \rangle) = |\cos(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)|$, para lo cual tomamos el valor absoluto del coseno y nos aseguramos de que el ángulo es el menor y no supera lo 90° sexagesimales.

$$\cos(\alpha) = \cos(\langle r, s \rangle) = |\cos(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}, \text{ de donde } \alpha = \arccos \left(\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \right)$$

De la recta r un vector director es $\mathbf{u} = (1, -1, 3)$, de la recta s el $\mathbf{v} = \mathbf{AP} = (0, 2, 1)$.

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = (1, -1, 3) \bullet (0, 2, 1) = 1, \|\mathbf{u}\| = \sqrt{(1^2 + 1^2 + 3^2)} = \sqrt{11}, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{(0^2 + 2^2 + 1^2)} = \sqrt{5}.$$

El ángulo pedido es $\alpha = \arccos\left(\left|\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right|\right) = \arccos\left(\left|\frac{1}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{5}}\right|\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{55}}\right) = 82'25063362''$.

4B.- Mi despertador no funciona muy bien, pues el 20% de las veces no suena. Cuando suena, llego tarde a clase el 20% de las veces; pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde es 0'9.

- Represente el diagrama de árbol del problema. 0'5 pts
- Justifique si el porcentaje de veces que llego tarde a clase y ha sonado el despertador es mayor que el 20%. 0'75 pts
- Justifique si la probabilidad de que no llegue tarde a clase es menor que 0,5. 0'75pts
- Si un día llego tarde a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador? 0'5 pts

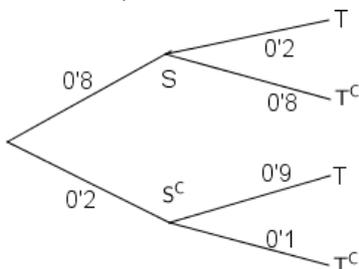
Solución

(a)
Represente el diagrama de árbol del problema. 0'5 pts

Llamemos S, S^c, T y T^c, a los sucesos siguientes, "sonar el despertador", "no sonar el despertador", "llegar tarde a clase" y "no llegar tarde a clase", respectivamente.

Datos del problema: p(S^c) = 20% = 0'2; p(T/S) = 20% = 0'2 ; p(T/S^c) = 90% = 0'9, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



(b)
Justifique si el porcentaje de veces que llego tarde a clase y ha sonado el despertador es mayor que el 20%

Me piden ver si: p(tarde a clase y ha sonado el despertador es mayor que el 20%) = **p(S∩T) > 20%**

Como **p(S∩T) = p(S)·p(T/S) = (0'8)·(0'2) = 0'16 < 0'2, es falso que la probabilidad de llegar tarde a clase y sonar despertador es mayor que el 20%.**

(c)
Justifique si la probabilidad de que no llegue tarde a clase es menor que 0,5.

Me piden ver si: p(no llegue tarde a clase es menor que 0,5) = **p(T^c) < 0'5**

Por el teorema de la Probabilidad Total:

Como **p(T^c) = p(S)·p(T^c/S) + p(S^c)·p(T^c/S^c) = (0'8)·(0'8) + (0'2)·(0'1) = 0'66, es falso que la probabilidad de no llegar tarde a clase sea menor de 0'5.**

(d)
Si un día llego tarde a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador?

Me piden **p(haya sonado el despertador si llego tarde) = p(S/T).**

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$p(S/T) = \frac{p(S \cap T)}{p(T)} = \frac{p(S) \cdot p(T/S)}{1 - p(T^c)} = \frac{(0'8) \cdot (0'2)}{1 - 0'66} = 8/17 \cong 0'470588.$$